Übungsblatt 1 + 2 Musterlösung

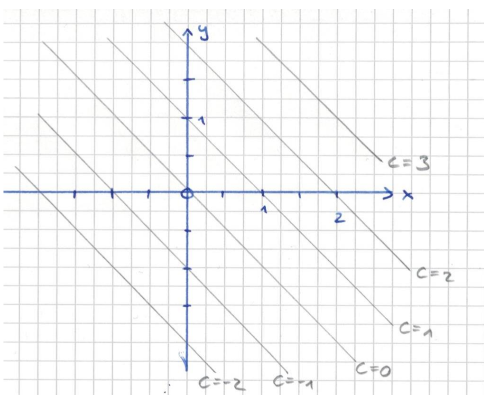
TH Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

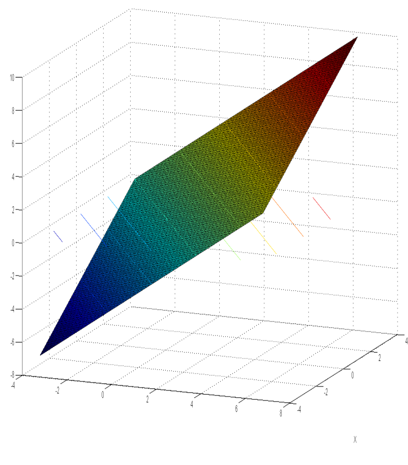
Aufgabe 1

Keine Musterlösung, man erzeuge nach Geschmack Bilder auf der Internet-Site.

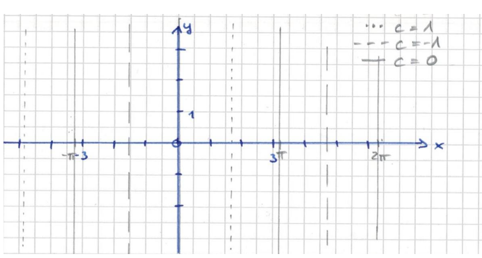
Aufgabe 2

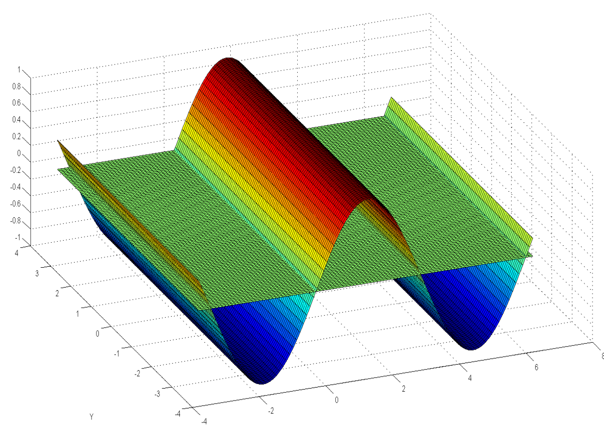
a.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$, Niveaulinien zu $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
(Im Bild daneben ist der Funktionsgraph zu sehen).





b.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin x$, Niveaulinien zu $c \in \{-1, 0, 1\}$.





Aufgabe 3

a.)

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y \cdot x \cdot e^{xy} - e^{xy}}{x^2} = \frac{e^{xy}}{x^2} \cdot (x \cdot y - 1)$$

(Quotientenregel mit $u(x) = e^{xy}$, $u'(x) = y \cdot e^{xy}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$, $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$)

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x \cdot e^{xy}}{x} = e^{xy}$$

b.)
$f_r(r,h) = \frac{\partial f}{\partial r} = 2 \cdot r\pi h$
$f_h(r,h) = \frac{\partial f}{\partial h} = \pi r^2$

c.)
$g(r,\varphi,t) = 3rte^{r\varphi}$
$g_r(r,\varphi,t) = \frac{\partial f}{\partial r} = 3te^{r\varphi} + 3rt\varphi e^{r\varphi}$

(Produktregel: $f_r = r \cdot (3te^{r\varphi}) = u(r) \cdot v(r)$ mit
$u(r) = r$, $u'(r) = 1$, $v(r) = 3te^{r\varphi}$, $v'(r) = 3t\varphi e^{r\varphi}$, $(u \cdot v)' = u'v + v'u$)
$g_t(r,\varphi,t) = \frac{\partial g}{\partial t} = 3re^{r\varphi}$
$g_\varphi(r,\varphi,t) = \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 3r^2te^{r\varphi}$

Aufgabe 4

a.) $f(x,y,z) = 2z^2 \cdot e^{3x} y \cdot \sin(z)$
$f_x(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 6e^{3x} z^2 y \cdot \sin(z)$

$f_{xx}(x,y,z) = (f_x)_x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (f_x(x,y,z))$
$= 18e^{3x} z^2 \cdot y \cdot \sin(z)$

$f_{xxy}(x,y,z) = (f_{xx})_y = \frac{\partial f}{\partial y}(f_{xx}(x,y,z))$
$= 18e^{3x} z^2 \cdot \sin(z)$

$f_{xxyz}(x,y,z) = (f_{xxy})_z = \frac{\partial f}{\partial z}(f_{xxy}(x,y,z))$
$= 18z^2 \cos(z) e^{3x} + 36z \cdot e^{3x} \cdot \sin(z)$
(Produktregel)
$f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z} = 2z^2 e^{3x} y \cdot \cos(z) + 4zy \cdot e^{3x} \sin(z)$
$f_{zx}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(f_z(x,y,z))$
$= 6z^2 e^{3x} y \cdot \cos(z) + 12z \cdot y \cdot e^{3x} \sin(z)$

$f_{zxy}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(f_{zx}(x,y,z))$
$= 6z^2 e^{3x} \cos(z) + 12z \cdot e^{3x} \sin(z)$

$f_{zxyx}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(f_{zxy}(x,y,z))$
$= 18z^2 e^{3x} \cos(z) + 36z \cdot e^{3x} \sin(z)$

Man sieht: $f_{xxyz} = f_{zxyx}$

b.) Es gibt unendlich viele Beispiele. Eines ist:
$f(x,y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$
$f_x(x,y) = \cos(x) \cdot \cos(y)$
$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial f_x}{\partial y} = -\cos(x) \cdot \sin(y)$
$f_y(x,y) = -\sin(x) \cdot \sin(y)$
$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial f_y}{\partial x} = -\cos(x) \cdot \sin(y)$
$f_{xy} = f_{yx}$

Aufgabe 5

Berechnung des Punktes P:
$f(2,1) = 3 \cdot 2/\sqrt{1} + 2\cos(\pi \cdot (2+2)) = 6 + 2\cos(4\pi) = 8$
$P = (2;1;8)$

Berechnung der partiellen Ableitungen:
$f(x,y) = 3x/\sqrt{y} + 2\cos(\pi \cdot (x+2y))$
$f_x(x,y) = \frac{3}{\sqrt{y}} - \pi \cdot 2\sin(\pi(x+2y))$
$f_x(2,1) = 3$
$f_y(x,y) = -1.5 \cdot \frac{x}{y^{3/2}} - 4\pi\sin(\pi(x+2y))$
$f_y(2,1) = -3$
Tangentialebene in Parameterform:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ f(2,1) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(2,1) \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(2,1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Umwandlung in Koordinatenform:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$d = (2, 1, f(2,1)) \cdot (n_1, n_2, n_3)$
$= (2,1,8) \cdot (-3,3,1) = -6 + 3 + 8 = 5$

Ebene: $n_1x + n_2y + n_3z = d$
$-3x + 3y + z = 5$

Aufgabe 6

Benutzt werden die Ergebnisse aus Aufgabe 2.

a.) $f(x,y) = e^{xy}/x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{xy}}{x^2}(x \cdot y - 1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy}$$
$$df = \frac{e^{xy}}{x^2}(x \cdot y - 1)dx + e^{xy}dy$$

b.) $f(r,h) = \pi r^2 h$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2r\pi h$$
$$\frac{\partial f}{\partial h} = \pi r^2$$
$$df = 2r\pi h \cdot dr + \pi r^2 \cdot dh$$

c.) $g(r,\varphi,t) = 3r \cdot t \cdot e^{r\varphi}$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 3te^{r\varphi} + 3r \cdot t \cdot \varphi e^{r\varphi}$$
$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 3r^2 t \cdot e^{r\varphi}$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = 3r \cdot e^{r\varphi}$$
$$dg = (3t \cdot e^{r\varphi} + 3r \cdot t \cdot \varphi \cdot e^{r\varphi})dr + (3r^2te^{r\varphi})d\varphi + (3re^{r\varphi})dt$$